Μαθημα 18ο 14/02/2017

Διαφορικές Εξ.

Μεθοδος αγνωστων σταθερων

$L(y) = b(x) \quad , \quad x \in I$

i) $b(x) = P(x)$

ii) $b(x) = e^{\lambda x} P(x)$

iii) $b(x) = P(x)\, e^{\sigma x} \cos\tau x$

$= P(x)\, e^{\sigma x} \sin\tau x$

Παραδειγμα (Β-30 Λυμενες)

$y'' - y' - 2y = 4e^{-x} \quad , \quad y(0) = a \;,\; y'(0) = b$

$y'' - y' - 2y = 0 \quad (E_0)_2$

(χ.π) $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

ριζες $\lambda_1 = 2 \;,\; \lambda_2 = -1$

Αρα ΘΣΛ $\{e^{-x}, e^{2x}\}$

Θετω $y = z e^{-x}$

$z'' e^{-x} + 2z'(-e^{-x}) + ze^{-x}$ $= 4e^{-x}$

$- [z' e^{-x} - z e^{-x}] - 2z e^{-x} = 4e^{-x}$

$\rightarrow \; z'' - 3z' = 4$

μια μερικη λυση

$z'_\mu = c \;\Rightarrow\; z'_\mu = -\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; z_\mu = -\frac{4}{3} x$

Αρα $\tilde{y}(x) = -\frac{4}{3} x e^{-x}$

$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{4}{3} x e^{-x} \quad , \quad y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} - \frac{4}{3} e^{-x} + \frac{4}{3} x e^{-x}$

$y(0) = a \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 = a$

$y'(0) = b \;\Rightarrow\; 2c_1 - c_2 - \frac{4}{3} = b$

- $L(y) = p(x)\, \underbrace{e^{\sigma x} \cos(\tau x)}_{Re\, e^{(\sigma+i\tau)x}}$

$$e^{(\sigma+i\tau)x} = e^{\sigma x}[\cos(\tau x) + i\sin(\tau x)]$$

$$Im\, e^{(\sigma+i\tau)x} = e^{\sigma x}\sin(\tau x)$$

$$L(y) = p(x)\, Re\, e^{(\sigma+i\tau)x} = Re\left(p(x)e^{(\sigma+i\tau)x}\right) \Rightarrow L(y) = p(x)\, e^{(\sigma+i\tau)x}$$

Άσκηση 3(vi), σελίδα 113

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x}\cos x \qquad (\sigma = -1,\ \tau = 1)$$

$(E_0)_2$: $y'' - 3y' + 2y = 0$

(χ.π) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

ρίζες : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$

Άρα $\{e^x, e^{2x}\}$ ΘΣΛ

Θεωρώ $y'' - 3y' + 2y = e^{(-1+i)x}$

Θέτω $y = z e^{(-1+i)x}$

Έχουμε $z'' e^{(-1+i)x} + 2 z'(-1+i)e^{(-1+i)x} + z(-1+i)^2 e^{(-1+i)x} -$

$- 3[z' e^{(-1+i)x} + z(-1+i)e^{(-1+i)x}] + 2 e^{(-1+i)x} = e^{(-1+i)x}$

$\Rightarrow z'' + 2z'(-1+i) + z(1-1-2i) - 3(z' + z(-1+i)) + 2z = 1$

$\Rightarrow z'' + z'(-2+2i-3) + z(-2i+3-3i+2) = 1$

$\Rightarrow z'' + (2i-5)z' + 5(1-i)z = 1$

μερική λύση : $z_\mu = \dfrac{1}{5(1-i)} = \dfrac{1+i}{5(1-i^2)} = \dfrac{1+i}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} i$

$\tilde{y}_\mu(x) = \left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} i\right) e^{-(-1+i)x}$

$$\tilde{y}_\mu = \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}i\right)e^{-x}(\cos x + i\sin x) = \frac{1}{10}e^{-x}\cos x - \frac{1}{10}e^{-x}\sin x +$$

$$+ i\left(\frac{1}{10}e^{-x}\cos x + \frac{1}{10}e^{-x}\sin x\right)$$

$$y_\mu(x) = \operatorname{Re}\tilde{y}_\mu = \frac{1}{10}e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

Όλες οι λύσεις δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10}e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

Εξισώσεις Euler (δεν έχουν σταθ. συντελ.) — και θέλω μη ομογ. τα ίδια κάνω

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 xy' + a_0 y = 0$$ (ομογενής)

$xy' \to dy/dt$

Δουλεύουμε είτε για $x>0$ είτε $x<0$

αν έχω $x<0$ κάνω το μετασχηματισμό $w=-x>0$ οπότε

είμαι πάλι στην περίπτωση για $x>0$

Μετασχηματισμός

$t=\log x \iff x=e^{t}$ $(t\in\mathbb{R})$ → με την καινούργια μεταβλητή έχω π.ο. όλο το $\mathbb{R}$

- $y' = \dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \dfrac{dy}{dt}$

- $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}\right) = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) =$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Θα λύσω ως προς t

Θα βρω την $y=\tilde{y}(t) \Rightarrow y(x) = \tilde{y}(e^{x})$

Άσκηση 6i, σελ 114

$x^2 y'' - xy' + y = 0$, $x > 0$

Θέτω $t = \log y$, $t \in \mathbb{R}$ ($y = e^t$)

Έχουμε

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Η εξίσωση γράφεται

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$$

(χ.π) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, ρίζες $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

ΒΣΛ $\{x, x\log x\}$

Άρα γεν. λύση

$y(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x\log x$, $x > 0$, c_1, c_2 αυθ. σταθ.

Άσκηση 7i, σελ 114

$(\Sigma_0)_2$: $x^2y'' - xy' + y = 0$

$y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ Π.Α.Τ

$y(x) = c_1 x + c_2 x\log x$	$y(1) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$
$y'(x) = c_1 + c_2\log x + c_2$	$y'(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$

άρα $c_1 = 1$, $c_2 = -1$

Οπότε $y(x) = x - x\log x$, $x > 0$

→ $x^2y'' - xy' + y = x$

Δεν αλλαζει κατι

Παιρνω $t = \log x \Rightarrow x = e^t$

και εχω $x^2y'' - xy' + y = x \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = e^t$

Παλι εχω σταθερους συντελεστες και μπορω να προσδιορισω μια μερικη λυση

Γραμμικα συστηματα με σταθ. συντελεστεστες (Μεθοδος Απαλοιφης)

σελ 207-213

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 12y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1'' = 2y_1' + 12y_2' \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1'' = 2(2y_1 + 12y_2) + 12(3y_1 + y_2) \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1'' = 40y_1 + 36y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 12y_2 = y_1' \quad (\times 3) \\ 40y_1 + 36y_2 = y_1'' \end{cases} \quad 34y_1 = y_1'' - 3y_1' \Rightarrow y_1'' - 3y_1' - 34y_1 = 0$$

$\Rightarrow y_1 \ldots$

Δεν τωρα παραγωγιζω αφου βρω την y_1 για να βρω την y_2

την y_2 την βρισκω αλγεβρικα απο την διαφ. εξισωση α' ταξης της y_1

Scanned by CamScanner

Άσκηση 1

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{cases}$$

δεν είναι σύστημα

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{-x} \\ y_2(x) = c_2 e^{-x} \end{cases}$$

με τα c_1, c_2 ανεξάρτητα μεταξύ τους

iii) $$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = -y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(x) = c_2 e^{-x} \\ y_1' - y_1 = -c_2 e^{-x} \end{cases}$$ c_2 ίδιο και στις δύο

$$y_1(x) = e^{x}\left[c_1 + \int (-c_2 e^{-x}) e^{-x}\, dx\right] = \; = c_1 e^{x} + c_2/2 \cdot e^{-2x}$$

Οι λύσεις είναι ζευγάρι

$$(y_1, y_2) = \left(c_2 e^{-x}, \frac{c_2}{2} e^{-2x} + c_1 e^{x}\right)$$

ii) $$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = 3y_1' - 2y_2' = 3(3y_1 - 2y_2) - 2(2y_1 - 2y_2) = 5y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1'' = 5y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Άρα έχω $$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \quad (-1) \\ y_1'' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2 \\ y_1'' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$$

(χ.π) $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ρίζες $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$

Άρα $y_1(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

$y_2 = \frac{1}{2}(3y_1 - y_1') = \frac{1}{2}\left(3c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{2x} + 3c_1 e^{-x} - 6c_2 e^{2x}\right) \Rightarrow$

$y_2(x) = 3c_1 e^{-x} - \frac{3}{2} c_2 e^{2x}$

Συνεπώς $y_1(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

$y_2(x) = 3c_1 e^{-x} - \frac{3}{2} c_2 e^{2x}$

→ με ΠΑΤ

$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$ με $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = 7$

οπότε θα έχω $\begin{cases} 5 = c_1 + c_2 \\ 7 = 3c_1 - \frac{3}{2} c_2 \end{cases}$ $c_1 = \ldots$ $c_2 = \ldots$

Μάθημα ασκήσεων:

Παρασκευή 15/12/2017 αίθουσα 001 ώρα 12-2

Παράδειγμα λυμένο 3

- $y_1' = y_1 - y_2 - y_3$

$y_2' = y_1 + 3y_2 + y_3$

$y_3' = -3y_1 + y_2 - y_3$

παραγωγίζω τουλάχιστον 2 φορές

$y_1'' = y_1' - y_2' - y_3' = \cancel{y_1} - y_2 - y_3 - \cancel{y_1} - 3y_2 - y_3 + 3y_1 - y_2 + y_3 = 3y_1 - 5y_2 - y_3$

$\Rightarrow y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3$

$y_1''' = 3y_1' - 5y_2' - y_3' = 3y_1 - 3y_2 - 3y_3 - 5y_1 - 15y_2 - 5y_3 + 3y_1 - y_2 + y_3 \Rightarrow$

$y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 & (1) \\ y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3 & (2) \\ y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3 & (3) \end{cases}$$

συστημα γραμμικο 3 εξ. με 3 αγνωστους το βρισκω
οπως ξερω απο γραμμικη
πχ $y_1 = \frac{D_1}{D}$ θα ειναι της μορφης (y_1', y_1'', y_1''')

Πραξεις ...

$y_1''' - 3y_1'' - 4y_1' + 12y_1 = 0$

(χ.π) $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 3) - 4(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda - 3) = 0$

- ριζες $-2, 2, 3$

ΘΣΛ $\{e^{-2x}, e^{2x}, e^{3x}\}$

λυση $y_1(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

απο (1), (2), (3) βγαινει:

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = y_1 - y_1' \\ 5y_2 + y_3 = 3y_1 - y_1'' \end{cases}$$

Αφαιρω

- $4y_2 = 3y_1 - y_1'' - y_1 + y_1' \Rightarrow 4y_2 = 2y_1 - y_1'' + y_1'$ κανω αντικατασταση την y_1 μαζι με τις σταθερες. ομοια και για την y_3

(παιρνω μια λυση την παραγωγιζω και τις αλλες απο αλγεβρικη αντικατασταση προσοχη μπορει να μην ισχυει ή να μη βολευει παντα (συνηθως))

Λύση

σταθεροί όροι (δεν αλλάζει κάτι)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + e^x \\ y_2' = y_1 - y_2 - e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'' = y_1' + y_2' + e^x = y_1 + y_2 + e^x + y_1 - y_2 - e^x + e^x = 2y_1 + e^x \\ y_2' = y_1 - y_2 - e^x \end{cases}$$

έχω $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + e^x \\ y_1'' = 2y_1 + e^x \end{cases}$

$y_1'' - 2y_1 = e^x$

(Εο)2 : $y_1'' - 2y_1 = 0$

(χ.π) $\lambda^2 - 2\lambda = 0$

Λύσεις $e^{\sqrt{2}x}$, $e^{-\sqrt{2}x}$

$y_1 = ze^x$

$z''e^x + 2z'e^x + e^x z - 2ze^x = e^x$

$z'' + 2z' + z - 2z = 1$

$z'' + 2z' - z = 1 \Rightarrow z = -1$

μερική λύση $y_{\mu,1} = -e^x$

$y_1(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} - e^{-x}$ γενική λύση

Φυλλάδιο 4, Άσκ 2

$y'' + py' + qy = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad p, q \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}$

Ισχύς : $y_p(t) = k\cos(\omega t) + \lambda\sin(\omega t)$

Λάθος ισχυρισμός πρέπει να έχω κάποιες προϋποθέσεις

Την τελευταία φορά κάναμε $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega t)$ (όμοια) Αντιπαράδειγμα

λύσεις : $x\cos(\omega x)$

$\sin(\omega x)$

αντιστοιχία : $p = 0$, $q = \omega^2$

έχω λύση $x\cos(\omega x)$

Β-ΣΙ Ασκήσεις

$b \in C[0, +\infty)$

συνάρτηση τ.ω $\exists\, c > 0$ με $\int_x^{x+1} |b(t)|\,dt \le c \quad \forall\, x \ge 0$

ΝΔΟ 1) $e^{-x}\int_0^x e^t |b(t)|\,dt \le c\,\frac{e}{e-1} \quad \forall\, x \ge 0$

2) όλες οι λύσεις της $y'' + 2y' + 2y = b$ είναι φραγμένες στο $[0, +\infty)$

Λύση

1) Απειροστικός Λογισμός

2) Θέλω αρχικά ένα ΒΣΛ

$(E_0)_2$: $y'' + 2y' + 2y = 0$

$(x.\pi)$: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -1 \pm i$

ΒΣΛ $\{e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x\}$ όταν $x \to \infty$ οι λύσεις είναι φραγμένες γιατί τείνουν στο 0

$y_1(x) = e^{-x}\cos x$, $y_2(x) = e^{-x}\sin x$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x \\ -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x & -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-2x} \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x - \sin x & -\sin x + \cos x \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \sin x \\ 1 & (\quad)' \end{vmatrix} = -e^{-x} \sin x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} \cos x & 0 \\ (\quad)' & 1 \end{vmatrix} = e^{-x} \cos x$$

Μερικη λυση

$$y_\mu(x) = y_1(x) \int_0^x \frac{W_1(s)}{W(s)} b(s)\, ds + y_2(x) \int_0^x \frac{W_2(s)}{W(s)} b(s)\, ds =$$

$$= e^{-2x} \cos x \int_0^x \frac{-e^{-s} \sin s}{e^{-2s}} b(s)\, ds + e^{-2x} \sin x \int_0^x \frac{e^{-s} \cos s}{e^{-2s}} b(s)\, ds$$

αν δειξω οτι η y_μ φραγμενη τοτε τελειωσα

$$|y_\mu(x)| \leq e^{-2x} |\cos x| \int_0^x e^s |\sin s| \cdot |b(s)|\, ds + e^{-2x} |\sin x| \int_0^x e^s |\cos s| |b(s)|\, ds \leq$$

$$\leq e^{-x} \int_0^x e^s |b(s)|\, ds + e^{-x} \int_0^x e^s |b(s)|\, ds = 2e^{-x} \int_0^x e^s |b(s)|\, ds \overset{1^{o}\ \varepsilon\rho\omega\tau.}{<} c \frac{e}{e-1}$$

οροι ειναι φραγμενη η y_μ

1) $$e^{-x} \int_0^x e^t |b(t)|\, dt = e^{-x} \left[\int_{x-1}^x e^t |b(t)| + \dots + \int_0^{x-[x]} e^t |b(t)|\, dt \right] \leq$$

$$\leq e^{-x} \int e^x \dots$$